Hertentamen 1 Computerondersteund Probleemoplossen

Docent: Kurt Lust

vr. 29 juni, 9.00-12.00 uur

Dit is een gesloten boek tentamen. Je hebt dus enkel je eigen schrijfgerief en eventueel een rekenmachine nodig. Deze moet voldoen aan de eisen voor het VWO-eindexamen.

Het tentamen bestaat uit 5 opgaven. Alle antwoorden moeten goed gestructureerd en gemotiveerd zijn. De gevolgde werkwijze moet duidelijk zijn. Wanneer je een stukje programma moet schrijven, doe dat dan volgens de regels besproken in de cursus (zinvolle namen voor variabelen, commentaar, ...).

Het tentamen wordt eerst gequoteerd op 100 punten. 10 punten krijg je zowiezo, de resterende 90 moet je verdienen. De punten staan aangegeven bij elke vraag. Wanneer je minimum 45 punten haalt voor het tentamen, wordt voor het berekenen van het eindresultaat een gewogen gemiddelde gemaakt met de punten van de practica (60% tentamen, 40% practica). Anders wordt je eindscore enkel aan de hand van het tentamen bepaald en heb je dus een onvoldoende.

Gelieve **op ieder blad** Uw naam, studentennummer en studierichting te vermelden. Begin iedere vraag op een nieuwe bladzijde en maak geen puzzel van Uw oplossing. Veel succes!

Vraag 1 $\boxed{\text{20 punten}}$ We hebben in de cursus gezien dat we de eerste afgeleide van een functie kunnen benaderen door

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}.$$

Een andere (betere) benadering is

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t-h)}{2h}.$$

We kunnen deze benadering op de volgende manier gebruiken om de oplossing van een gewone differentiaalvergelijking

$$y'(t) = f(y(t), t)$$

te berekenen:

$$y'(t + h/2) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

en dus

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(y(t+h/2), t + h/2).$$

We kennen $y(t + h/2)$ echter niet en benaderen die dan maar d.m.v. lineaire interpolatie in de punten $y(t)$ en $y(t+h)$. Dit leidt tot het volgende schema:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(\frac{y_{n+1} + y_n}{2}, t_n + h/2\right) \text{ met } h = t_{n+1} - t_n.$$

Wanneer is een tijdsintegratieschema absoluut stabiel? Is bovenstaand schema absoluut stabiel? Toon aan!

Hint: Schrijf de parameter α van de testvergelijking als $\alpha_R + i\alpha_I$.

Vraag 2 $\boxed{\text{10 punten}}$ We hebben twee verschillende definities gezien voor de machineprecisie en die aangeduid met de symbolen ϵ_{mach} en u. Wat zijn deze twee definities en wat is het verband tussen ϵ_{mach} en u bij a) afkappen en b) optimale afronding?

Zie ommezijde

Vraag 3 $\boxed{\text{25 punten}}$ We hebben 3 methoden gezien om de kleinste kwadraten oplossing van een overgedetermineerd stelsel $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$) op te lossen. Veronderstel dat $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = n$.

a) Één methode is de methode via het normaalstelsel. Hoe werkt deze methode? Welke andere algoritmes gebruik je om eventuele deelproblemen op te lossen?

b) Welke zijn de twee andere methoden? Geef aan hoe die werken. Hoe kan je de formules afleiden uit het normaalstelsel? Welke andere numerieke technieken uit de cursus kan je gebruiken om deelproblemen op te lossen?

c) Welk van de drie methodes heeft de grootste problemen met numerieke stabiliteit en waarom? Hebben de andere methodes soortgelijke problemen?

Vraag 4 $\boxed{\text{20 punten}}$ Gegeven: Een vierkante benedendriehoeksmatrix $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en een rechterlid $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Schrijf een Matlab *functie* die de oplossing van het stelsel $\boldsymbol{Lx} = \boldsymbol{b}$ berekent. Invoerargumenten zijn L (voor de matrix $\boldsymbol{L}$) en b (voor de vector $\boldsymbol{b}$), het uitvoerargument is x (de vector $\boldsymbol{x}$). L wordt opgegeven als een vierkante matrix (in een array dus) waarbij je mag aannemen dat alle elementen boven de diagonaal 0 zijn. Je hoeft dat dus niet te testen.

Vraag 5 $\boxed{\text{15 punten}}$ Schrijf een Matlab functie met als invoerargument een (kolom)vector x en als uitvoerargumenten de variabelen gem en stdafw. Hierbij is gem het gemiddelde van de rij, dus

$$\text{gem} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

met $x_1, \ldots, x_n$ de elementen van de vector x. stdafw is de standaarddeviatie

$$\text{stdafw} = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - \bar{x}^2}.$$

Opmerking: Je kan dit doen zonder gebruik te maken van een lus, maar een oplossing met een lus wordt ook goed gerekend.